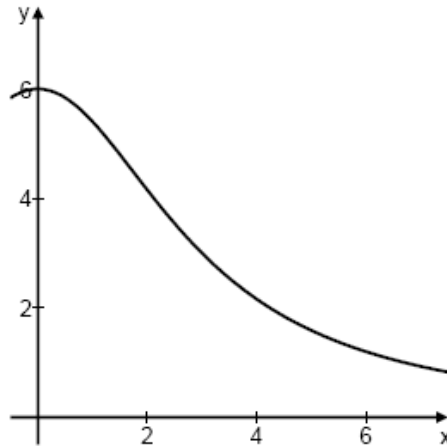


Abitur 2009 Mathematik LK Infinitesimalrechnung Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{54}{x^2 + 9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Teilaufgabe 1. (6 BE)

Zeigen Sie ohne Verwendung der Differentialrechnung, dass die Funktion f **nur** an der Stelle $x = 0$ ein lokales Maximum hat.

Teilaufgabe 2. (9 BE)

Berechnen Sie näherungsweise das Integral $\int_3^6 f(x) dx$, und zwar entweder

- durch Ober- und Untersumme (Streifenbreite 1) oder
- durch eine (Sehnen-)Trapezsumme (Streifenbreite 1).

Skizzieren Sie Ihren Näherungsansatz in die vorgegebene Abbildung. Beurteilen Sie Ihren Näherungswert. Erläutern Sie, wie man ihn verbessern könnte.

Teilaufgabe 3. (9 BE)

Die Funktion f kann im Bereich $3 \leq x \leq 6$ durch eine andere Funktion g mit $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2}$ angenähert werden.

Die Punkte $P(3|f(3))$ und $Q(6|f(6))$ liegen (auch) auf dem Graphen von g . Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Punkte die Funktionsgleichung von g .

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{5,4}{x} + \frac{10,8}{x^2}$]

Berechnen Sie unter Verwendung einer Stammfunktion das Integral von g über dem Intervall $[3; 6]$.

In einer Formelsammlung finden Sie: $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x) + C$. Dabei ist $\arctan(x)$, oder auch $\tan^{-1}(x)$, die Umkehrfunktion der Tangensfunktion.

Teilaufgabe 4.1 (10 BE)

Begründen Sie damit die folgende Gleichung:

$$\int \frac{54}{x^2+9} dx = 18 \cdot \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Berechnen Sie den Wert des Flächeninhalts unter dem Graphen von f über dem Intervall $[3; 6]$ mit Hilfe einer Stammfunktion.

Vergleichen Sie diesen Wert mit den Näherungswerten aus den Aufgaben 2 und 3, indem Sie deren jeweilige prozentuale Abweichung angeben.

Teilaufgabe 4.2 (6 BE)

Untersuchen Sie die Stammfunktionen von g und f (mit $C = 0$) bezüglich ihres Verhaltens für $x \rightarrow \infty$ und geben Sie den wesentlichen Unterschied an.